

---

## Pratique Supplémentaire 12 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 7.1 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

**Remarques :** il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

---

### Exercice 1

Soit  $A$  une matrice symétrique de taille  $n \times n$ ,  $\lambda_1, \lambda_2$  deux valeurs propres de  $A$ , et  $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ ,  $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$  des vecteurs propres associés. Sans utiliser le théorème spectral, montrer que si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , alors  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ .

**Sol.:** En effet, si  $A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$  et  $A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$ , alors (en utilisant l'exercice 2)

$$\lambda_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = A\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \cdot A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2.$$

Ainsi,  $(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ . On divise par  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ , et on obtient  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ .